Anzahl Mersennescher Primzahlen

Abstract: The number of Mersenne-prime numbers is unlimited.

H. Scheid bemerkt in seinem Standardwerk [1], S. 371, daß unter der Annahme der Gültigkeit einer logarithmischen Verteilungsfunktion die Wahrscheinlichkeit, daß die Mersennezahl $M_p = 2^p - 1$ eine Primzahl ist, den Wert $E = \frac{1}{\ln M_p} = \frac{1}{\ln(2^p-1)} \approx \frac{1}{p \ln 2}$ hat. Für die Anzahl Primzahlen $\leq M_p$ folgte daraus

$$\pi\left(M_p\right) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \approx \frac{1}{\ln 2} \ln \ln x. \tag{1}$$

Wenn also diese Verteilungsfunktion $\forall x$ gültig wäre, folgte daraus wegen $\lim_{x\to\infty} \ln\ln x = \infty$, daß es unendlich viele Mersennesche Primzahlen gibt, deren Anzahl im Mittel mit $\ln\ln x$ wächst, also sehr langsam. Für die 30. Mersennesche Primzahl mit p=216091 erhält man
$\pi\left(M_{30}\right) \approx \ln\ln\left(2^{216091} - 1\right) / \ln 2 \approx 17,2$. Als Verbesserung dieser groben Näherung gibt er an

$$\pi\left(M_p\right) \approx \frac{e^C}{\ln 2} \ln \ln x \tag{2}$$

mit der Euler-Mascheroni-Konstante C=0,577215664901$\cdots$. Damit erhält man den hervorragend guten Näherungswert $\pi\left(M_{30}\right) \approx 30,62$.

Nach [2] zitiert Scheid auf S. 298

$$C = \lim_{n'\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{n'} \frac{1}{n} - \ln n' \right)$$

und $e^C = 1,781072416\cdots$.

Da in [3] die Gültigkeit der logarithmischen Verteilungsfunktion streng abgeleitet wurde:

$$w = \frac{\pi(x)}{b} \approx \frac{A'}{\ln x}\left(1 \pm \frac{2A'}{\ln x}\right) \tag{3}$$

mit der Konstante $A' \approx 1,06$, b=Breite des betrachteten x-Intervalls. Der Term $s = \frac{2A'^2}{\ln^2 x}$ gibt die Streuung um den Mittelwert $\frac{\pi(x)}{b} \approx \frac{A'}{\ln x}$ an. Der hiernach zu erwartende Mittelwert für M_{30} liegt um den Faktor A' höher, aber innerhalb der Streubreite. Somit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz. Die Anzahl der Mersenneschen Primzahlen wächst für $p \to \infty$ über alle Schranken.

Literatur

[1] H. Scheid: Zahlentheorie, BI Wissenschaftsverlag Mannheim,1991

[2] Ribenboim: The Book of prime number records, Springer, N.Y., 1988

[3] HW. Schmidt: Einige Sätze über Primzahlen und spezielle binom. Ausdrücke,
https//arxiv.org/abs/1406.039 Categories math.GM, revised Version 2, 01.09.2015

Danksagung

Für die Systembetreuung meines PC und Unterstützung bei der Internetarbeit danke ich Christian Schmidt-Gütter.