# Vermutungen von Polignac und Goldbach

Hans Walther Ernst Gerhart Schmidt

13. Mai 2019

2. Fassung

**Keywords:** prime numbers, Polignac, Goldbach

**Abstract**

Proofs are given for a conjecture of Polignac and a modified conjecture of Goldbach.

## 1. Satz von Polignac

Im Jahre 1849 vermutete Alphonse de Polignac nach [1] folgenden

**Satz 1.:** Zu jedem geraden Abstand zweier Primzahlen $2n = p_2 - p_1$ , $n \geq 1$ natürliche Zahl, gibt es unendlich viele Primzahlpaare $\{p_1, p_2\}$ .

In [2] wurde die Gültigkeit von Satz 1 für $n = 1$ (Primzahlzwillinge) bewiesen und sei hier wiederholt als

**Satz 2.:** Die mittlere streuende Anzahl $\pi_{2,s}(\eta_n)$ von Primzahlzwillingen im links offenen Quadratintervall $\eta_n := \left(n^2, (n+1)^2\right]$ beträgt

$$\pi_{2,s}(\eta_n) = (2n+1)\left(\frac{A'}{2\ln(n+1)}\right)^2 (1+\delta_2) \ \ , A' \approx 1,06. \tag{1}$$

Darin gilt für den Mittelwert $\delta_2 = 0$; für die mittlere Oberschranke

$$\delta_2 = \delta_{2,+} = 2\left(\frac{A'}{\ln(n+1)}\right)^2 + \frac{4A'}{\ln(n+1)} \tag{2}$$

und für die mittlere Unterschranke

$$\delta_2 = \delta_{2,-} = 2\left(\frac{A'}{\ln(n+1)}\right)^2 - \frac{4A'}{\ln(n+1)} \ . \tag{3}$$

Da schon $\pi_{2,s}(\eta_n)$ für $\eta_n \to \infty$ über alle Schranken wächst, divergiert $\pi_2(n)$ erst recht für $n \to \infty$.

**Bemerkung:** Im Abschnitt 5.4 von [2] wird darauf hingewiesen, daß die maximalen Ober- und Unterschranken höchstens um einen Faktor 2 größer sein können.

Außerdem wird mit Formel (80) in [2] das Goldbach-Theorem bewiesen, das hier angefügt sei als

**Satz 3.:** Die streuende Vielfachheit der Anzahl von Goldbachpaar-Darstellungen einer gegebenen Zahl $2m$ beträgt

$$v_{2m} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{A'}{\ln(n+1)}\right)^2 (1+\delta_{2,g}) \ \ , 2m \in \eta_n \, , \tag{4}$$

wobei für mittlere und maximale Ober- und Unterschranken gilt

$$\delta_{2,g} \approx 2\delta_2 \ und \ \delta_{2,g,max} \approx 4\delta_2. \tag{5}$$

**Bemerkung:** Der Faktor $f = 2$ in $\delta_{2,g} \approx 2\delta_2$ gilt für hinreichend große n, d.h. $p_1 \in \eta_{A,n}, \ p_2 \in \eta_n, \ \eta_{A,n} = [0, 2n+1] \ll \eta_n$. Er verringert sich gegen den Wert f=1, wenn Zahlenpaare betrachtet werden, deren Abstand sich dem Zwillingsabstand 2 nähert.

**Bew. von Satz 1.:** Die Beweise der Sätze 2 und 3 beruhen beide - wie auch der Satz von Polignac - auf der Betrachtung eines Primzahlpaares, lediglich mit unterschiedlichem Primzahlabstand, welcher nur den Faktor f beeinflußt, $2 \geq f \geq 1$. Daher gilt Satz 1 bei geeigneter Wahl des Faktors f für alle $n < \infty$, denn die Vielfachheit analog unseren Formeln (1) und (4) divergiert stets für $n \longrightarrow \infty$; in jedem Intervall $\eta_n$ mit $n \geq n_0$ ist der Zuwachs von die Behauptung von Satz 1 erfüllenden Beiträgen $\geq 1$; **q.e.d.**

In diesem Sinne stellen der Primzahlzwillingssatz und das Goldbach-Theorem die beiden extremalen Spezialfälle von Satz 1 dar.

**2. Zweite Goldbach-Hypothese**

Eine zweite Hypothese von Christian Goldbach besagte, daß jede ungerade Zahl $m > 17$ eine Darstellung

$$m = p + 2n^2 \tag{6}$$

hat, worin $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $p \geq 3$ eine Primzahl bedeuten. Diese Hypothese prüfte Leonhard Euler $\forall m \leq 2500$, ohne ein Gegenbeispiel zu finden. Jedoch widerlegte Moritz Stern (1807-95) die Hypothese durch Angabe von zwei Gegenbeispielen: $m_1 = 5777$, $m_2 = 5993$. Die Gültigkeit der Hypothese konnte numerisch $\forall m < 5777$ bestätigt werden. Ein weiteres Gegenbeispiel für größere m konnte bis heute nicht gefunden werden. Ob es solche geben kann, soll hier einem Wahrscheinlichkeitstest unterzogen werden. Wir formulieren den von der Hypothese abweichenden

**Satz 4.:** Die Anzahl M von ungeraden Zahlen $m \geq 5$, die keine Darstellung (6) haben, ist endlich. Es gilt $3 \leq M \leq M_0 < \infty$. Es gibt $\forall m > 55778 = 2 \cdot 167^2$ keine ungeraden Zahlen, die (6) nicht erfüllen. Die Vielfachheit V der Darstellbarkeit von m als $m = p_i + 2n_i^2$ beträgt im Mittel

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{A'}{\ln(2i^2)} \text{ , } A' \approx 1,06; \tag{7}$$

ihre mittlere Abweichung beträgt

$$\pm V' = 2 \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{A'}{\ln(2i^2)} \right)^2 \tag{8}$$

und ihre maximale Abweichung ist

$$\pm V_{max} = 2V'. \tag{9}$$

Tabelle 1

| n | $V_{real}$ | V | $V - V_u$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2,7 | -8,6 |
| 5 | 2 | 3,0 | -8,8 |
| 19 | 3 | 5,7 | -8,0 |
| 20 | 4 | 5,8 | -8,0 |
| 29 | 5 | 7,2 | -7,4 |
| 31 | 6 | 7,4 | -7,3 |
| 40 | 7 | 8,7 | -6,7 |
| 46 | 8 | 9,4 | -6,4 |
| 59 | 9 | 11,0 | -5,6 |
| 61 | 10 | 11,3 | -5,4 |
| 71 | 11 | 12,4 | -4,8 |
| 74 | 12 | 12,8 | -4,6 |
| 79 | 13 | 13,3 | -4,4 |
| 110 | 14 | 16,7 | -2,4 |
| 124 | 15 | 18,1 | -2,0 |
| 125 | 16 | 18,3 | -1,8 |
| 136 | 17 | 19,4 | -1,2 |
| 139 | 18 | 19,7 | -1,0 |
| 146 | 19 | 20,4 | -0,6 |
| 151 | 20 | 20,9 | -0,3 |
| 160 | 21 | 21,7 | 0,15 |
| 170 | 22 | 22,7 | 0,7 |
| 176 | 23 | 23,3 | 0,8 |
| 181 | 24 | 23,8 | 1,1 |
| 190 | 25 | 24,6 | 1,6 |
| 194 | 26 | 25,0 | 1,8 |
| 200 | 27 | 25,6 | 2,2 |
| 214 | 28 | 26,9 | 3,0 |
| 215 | 29 | 27,0 | 3,1 |
| 236 | 30 | 28,9 | 4,3 |
| 244 | 31 | 29,6 | 4,7 |
| 250 | 32 | 30,2 | 5,1 |

**Bemerkung:** Zur Ermittlung der genauen Anzahl $M_0$ genügt die numerische Überprüfung aller ungeraden Zahlen $5993 < m < 55778$, da 17, $m_{1,2}$ als die kleinsten Zahlen dieser Art erwiesen sind.

Es ist bemerkenswert, daß auch für eine fest gewählte größere Zahl $m_0$ die i-te Darstellung $p_i + 2n_i^2$ innerhalb der Streugrenzen unserer Formeln (7) bis (9) erreicht wird. Dies sei demonstriert am Beispiel $m_0 = 125853$, **Tab.1.**

**Bew.:** Nach (88),(89) in [2] beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß eine Zahl $x \in \eta_n$ Primzahl ist,

$$W(x) = \frac{\pi(\eta_n)}{b_n} = \frac{A'}{2\ln(n+1)} \approx \frac{A'}{\ln x} \tag{10}$$

mit der Intervallbreite $b_n = 2n + 1$ von $\eta_n$. Die mittlere Abweichung davon ist

$$W_f(x) = 2\left(\frac{A'}{2\ln(n+1)}\right)^2, \tag{11}$$

die maximale Abweichung

$$W_{f,max} = 2W_f(x). \tag{12}$$

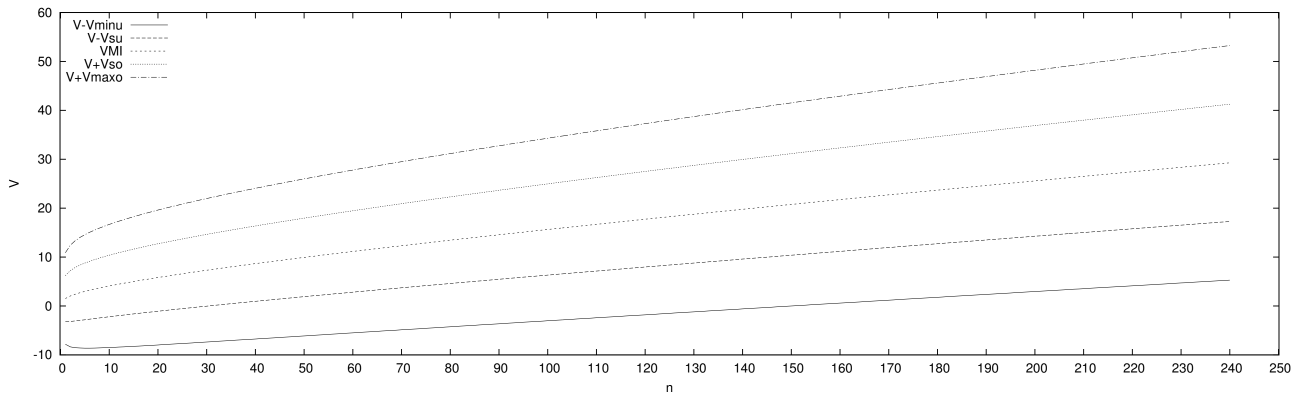
Die Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebig gewählte Zahl $m = x + 2i^2$ auf eine Primzahl $x = p_i = m - 2i^2$ führt, ist durch (10) gegeben. Die Anzahl möglicher Quadratzahlen $\leq m$ ist $n = \left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right] \geq i$, wobei $[\centerdot]$ den ganzzahligen Anteil bezeichnet. Daher liefert

$$W_{GH} = \sum_{i=1}^{n} W(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A'}{\ln(2i^2)} =: V \tag{13}$$

den wahrscheinlichen Wert der Vielfachheit der Darstellbarkeit von m gemäß (6). Die wahrscheinliche Abweichung davon ist dann gegeben durch $V'$ gemäß (8) und die maximal mögliche Abweichung gemäß (9).

Die mittlere Erwartung V gilt auch für den Bereich $5 \leq m \leq 2 \cdot 167^2$. Weil aber der Streubereich darin größer als der Erwartungswert ist, kann es Zahlen m geben, für die $W_{GH}(m) = 0$ gilt; **q.e.d.**

Die **Abb.1** zeigt die graphischen Darstellungen von V nach (7), $V - V'_{u,o}$ nach (8) und $V - V_{u,o}$ nach (9) über n. Daraus ist abzulesen, daß $V - V'_u = 0$ etwa bei $n \approx 31$ und $V - V_{u,max} = 0$ bei $n \approx 150$ bzw. $V - V_{u,max} \geq 1$ bei $n = 167$ erreicht ist. Da die Kurven von da an für $n \to \infty$ divergieren, sind Werte von $V < 1$ für $n > 167$ nicht mehr möglich.




Danksagung

Für die Systembetreuung meines PC danke ich Christian Schmidt-Gütter und für Unterstützung bei der Arbeit mit LaTeX und gnuplot Susanne Gütter.

# Literatur

[1] Weisstein, Eric W. "de Polignac's Conjecture." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/dePolignacsConjecture.html

[2] Schmidt, H. W. “Einige Sätze über Primzahlen und spezielle binomische Ausdrücke”. https://arxiv.org/abs/1406.0397 (categories math.GM, revised version 2, 1.Sept.2015)